Μάθημα 12ο 30/03/2018

Κεφ. 3ο: Ολόμορφες Συναρτήσεις

Ορισμός :

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό. Η $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται μιγαδικά διαφορίσιμη (ή παραγωγίσιμη)

[ή απλώς διαφορίσιμη ή $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη]

στο σημείο $z_0 \in D$ αν $\exists$ το :

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)}$$

και τότε

αυτό λέγεται μιγαδική παράγωγος της f στο z_0

Αν η $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε κάθε $z_0 \in D$ τότε λέγεται $\boxed{\text{ΟΛΟΜΟΡΦΗ}}$ (στο D)

ή

$\boxed{\text{ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ}}$

Αν η $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, τότε η f λέγεται ακέραια συνάρτηση (entire function)

Παραδείγματα | ① Κάθε σταθερή είναι ακέραια.

$$\left[f(z) = c \in \mathbb{C} \ \forall \ z \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{0}{z - z_0} = 0 \ \forall \ z_0 \in \mathbb{C} \right]$$

και έχει παράγωγο $f'(z) = 0 \ \forall \ z \in \mathbb{C}$

②

Η ταυτοτική f με $f(z) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια με παράγωγο

$$f'(z_0) = \lim \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \ \forall \ z_0 \in \mathbb{C}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ μιγαδικά διαφορίσιμες στο $z_0 \in D$.

$\Rightarrow$ (α) f συνεχής στο z_0

(β) (άλγεβρα παραγώγων):

$f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (αν $g(z_0) \neq 0$) μιγ. διαφ. στο $z_0 \in D$

και $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(αν $g(z_0) \neq 0$) $$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

(c) $h: E \longrightarrow \mathbb{C}$ με $E \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό

και $f(D) \subset E$ και h μιγ. διαφ. στο $f(z_0)$

$$\Longrightarrow (h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

(ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)

(3) Η $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι ακέραια με παράγωγο

$$f'(z) = n z^{n-1} \quad \left[\lim_{z \to z_0} \boxed{\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}} = \lim_{z \to z_0} \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} z^k \cdot z_0^{n-1-k}} = \right.$$

$$\left. = n z_0^{n-1} \right]$$

(4) Η $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ με $f'(z) = -n \cdot \dfrac{1}{z^{n+1}}$

με $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ολόμορφη

(5) Κάθε πολυώνυμο και κάθε ρητή συνάρτηση του z είναι ολόμορφες στο πεδίο ορισμού τους (τα πολυώνυμα: ακέραιες)

(6) Η $\boxed{f(z)=\bar{z}}$, $z\in\mathbb{C}$, δεν είναι πουθενά μιγαδικά διαφορίσιμη αφού

$\boxed{\text{WOW!}}$

$$\nexists \lim_{z\to z_0}\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\lim_{w\to 0}\frac{\bar{w}}{\underbrace{w}_{=\frac{\bar{w}^2}{|w|^2}}}=$$

για κάθε $z_0\in\mathbb{C}$

$\underline{w=\alpha+\beta i}$

$$\lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{\alpha^2-\beta^2-2i\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\ \nexists$$

$f(z)=\bar{z}=x-yi=u(x,y)+iv(x,y)$

Γιατί συμβαίνει Αυτό??

(A) Έχω ότι κάθε $f:D\to\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό, είναι (1) $f(x+iy)=\underbrace{\operatorname{Re}f(x+iy)}_{u(x,y)}+i\underbrace{\operatorname{Im}f(x+iy)}_{v(x,y)}$, $(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$

όπου $u,v: D\to\mathbb{R}$ με $D\subset\mathbb{R}^2$

και από την αντιστοίχιση $x+iy\underset{\text{αντιστοίχιση}}{=}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ και

$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=$

$$\underset{\text{αντιστοίχιση}}{=}\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$$

έχουμε η (1) αντιστοιχεί με το διανυσματικό πεδίο

$$D \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Στο (6) δηλαδή η $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί (1-1 και επί) αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

[$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι η παράγωγος του $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Παίρνω την Jacobιανό και παραγωγίζω το "x" ως προς x και y και αυτά αποτελούν την $1^{η}$ ΓΡΑΜΜΗ.
Μετά παραγωγίζω το "y" ως προς "x" και "y" και αυτά αποτελούν τη $2^{η}$ ΓΡΑΜΜΗ]

$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ δηλ. $u, v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, δηλ. οι u, v είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη.

$\Longrightarrow$ Άρα, το αν μια $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορίσιμη δεν φαίνεται να εξαρτάται από το πόσες φορές είναι $\mathbb{R}$ − διαφορίσιμη, δηλ. αν την δούμε ως διανυσματικό πεδίο $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: D \longrightarrow \mathbb{R}^2$

[<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: το δ.π. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ αντιστοιχεί στην μιγαδικά διαφορίσιμη $f(z) = z$,
ενώ το δ.π. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ στην ΠΟΥΘΕΝΑ μιγ. διαφ. $f(z) = \bar{z}$]

(B) <u>Λήμμα:</u> Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, είναι μιγ. διαφ. στο $z_0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0}$$

<u>Απόδ.</u>

$(\Longrightarrow)$ Αν $\exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$

$$\underset{\substack{\text{αλγεβρ}\\ \text{ορίων}}}{\iff} \lim_{z \to z_0} \underbrace{\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right)}_{} = 0$$

$$= \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0}$$

Για $\lambda = f'(z_0)$ έχω το ζητούμενο.

$(\Longleftarrow)$

Έστω ότι $\exists$ τέτοιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε:

$$\lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{} \underset{\text{ΟΡΙΩΝ}}{\overset{\text{ΑΛΓΕΒΡΑ}}{=}} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} + \underbrace{\lim_{z \to z_0} \lambda}_{= \lambda}$$

$$= \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} + \lambda$$

ΠΟΡΙΣΜΑ (*) f μιγ. διαφ. στο z_0

$$\iff \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0 \quad \text{για } \lambda = f'(z_0)$$

(**) Επίσης: Η συνάρτηση $z \mapsto \lambda z$, $z\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}$

λέγεται $\mathbb{C}$ γραμμική.

(ΟΛΕΣ οι $\mathbb{C}$-γραμμικές είναι αυτής της μορφής)

της $z\mapsto \lambda z+b$, $b\in\mathbb{C}$ θα τις λέμε ομοπαραλληλικές.

[Μια $\mathbb{C}$-γραμμική συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$:\iff \forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{C},\ z,w\in\mathbb{C}:$
$f(\lambda z+\mu w) = \lambda f(z)+\mu f(w)$

$$\xrightarrow[z=1]{\mu=0} f(\lambda)=\lambda f(1)\ \ \forall\ \lambda\in\mathbb{C} \underset{\lambda\mapsto z}{\iff} f(z) = z\cdot\underbrace{f(1)}_{\in\mathbb{C}}$$]

Ποιό διανυσματικό πεδίο αντιστοιχεί στην $z\xrightarrow{L}\lambda z$
$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ (sos)

Απάντηση

$z=x+iy \Rightarrow L(z)=L(x+iy) = (\lambda_1+i\lambda_2)(x+iy) =$

$$= \underbrace{\lambda_1 x-\lambda_2 y}_{u(x,y)} + i\underbrace{(\lambda_2 x+\lambda_1 y)}_{v(x,y)}$$

η L αντιστοιχεί στο δ.π.

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{=:\Lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=:\Lambda = |\lambda| \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{|\lambda|} & -\frac{\lambda_2}{|\lambda|} \\ \frac{\lambda_2}{|\lambda|} & \frac{\lambda_1}{|\lambda|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$

Το $\circledast \iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$

$\underset{\text{αντιστοίχου}}{\iff} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0) - (\lambda_1, -\lambda_2)(x - x_0, y - y_0) - i(\lambda_2, \lambda_1)(x - x_0, y - y_0)}{|(x - x_0) + i(y - y_0)|} = 0$ (διά)

<u>Είχαμε πει παλιά:</u>

$\lim\limits_{x+iy \to x_0+iy_0} (u(x,y) + iv(x,y))$, $\lim u(x,y) = b_1 \wedge \lim v(x,y) = b_2$

τότε: $\lim (u(x,y) + iv(x,y)) = b_1 + ib_2$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) - \Lambda\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$ Το δ.π. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμο στο $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ με παράγωγο $\underbrace{D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0)}_{= \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

SUPER(-DUPER) SOS

ΘΕΩΡΗΜΑ

$D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$

f μιγ. διαφ. στο z_0 $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμο στο (x_0,y_0) και

$$\left.\begin{array}{l} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{array}\right\} \text{Εξισώσεις Cauchy-Riemann.}$$

$$\underbrace{\lim_{z \to z_0} g(z) = b \in \mathbb{C}}, \quad g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} : |g(z) - b| < \varepsilon$$

$$z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g(z) = \underbrace{u(x,y)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{v(x,y)}_{\in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad z_0 = x_0 + iy_0$$

<u>άρα:</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underbrace{z \in D(z_0, \delta)}_{} \setminus \{0\} : |\underbrace{g(z) - b}_{}| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow 0 < |z - z_0| < \delta \qquad \Longleftrightarrow \| \underbrace{(u(x,y) - b_1, v(x,y) - b_2)}_{} \| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow 0 < \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

$$= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y) \mapsto (x_0, y_0)} u(x,y) = b_1 \ \text{και} \ \lim_{(x,y) \mapsto (x_0, y_0)} v(x,y) = b_2$$

Παράδειγμα Η εκθετική συνάρτηση $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι ακέραια (δηλ. ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$, δηλ. μιγαδικά διαφ. σε κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$)

$$\underbrace{\exp z}_{=e^z} = \exp(x+iy) = e^{x+iy} \underset{\text{ορ}}{=} e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos x + i\sin y) =$$

$$= e^x \cos x + i e^x \sin y$$

αντιστοιχεί στο δ.π. του $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ η $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μιγαδικά διαφορ. και

η παράγωγός της στο $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι το λ με $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \exp'(z_0)$

$$= u_x(x,y) + i v_x(x_0,y_0) = e^{x_0}\cos y_0 + i e^{x_0} \sin y_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{(e^z)' = e^z}$$

Σύνοψη: f μιγ. διαφορίσιμη $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (πραγματική) διαφ. $\mathbb{R}$

και παράγωγος $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε $\mathbb{R}$ διαφορίσιμη μιγαδική συνάρτηση $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό στο $z_0 \in D$ είναι μιγαδικά

διαφορίσιμη $\Longleftrightarrow$

εξισώσεις Cauchy-Riemann: $u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) = 0$ $\Longrightarrow$

$v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) = 0$

$\Longrightarrow \nabla u(x_0,y_0) = (0,0)$